

Námskeið fyrir próf til A/T leyfis.

## **Lausnir á gömlum prófdæmum**

Spenna, straumur, viðnám,  
spólur, þéttar og sveiflurásir

© 1999 Hrafnkell Eiríksson  
hkelle@mbl.is

Í þessu litla hefti má finna lausnir á nokkrum dæmum í rafmagnsfræðum sem lögð hafa verið fyrir á A/T-leyfisprófum undanfarin ár. Reynt er að hafa lausnirnar og útskýringarnar sem einfaldastar en trúlega er hægt að gera miklu betur. Allar ábendingar um hvað megi betur fara eða leiðréttingar á villum eru vel þegnar svo og lausnir á fleiri dæmum! Ef þú lumar á meira efni þætti mér vænt um að fá það til að bæta við þetta hefti.

Öllum er frjálst án sérstakrar heimildar að fjölfalda eða afrita þetta hefti eða efni þess, annaðhvort í hluta eða heild sinni sé þess gætt að þessi klausa fylgi afritinu og gildi einnig um það. Öllum er einnig heimilt að gera þær breytingar sem þeim sýnist á efni þessa heftis og gefa þær út sé þess gætt að þessi klausa fylgi breytingunum og gildi einnig um þær. Ef heftið eða einhver hluti efnis þess er gefið út sem hluti af öðru efni þá skal þessi klausa einnig fylgja öllu því efni og gilda um það allt. Einnig skal gæta þess að nöfn allra sem eiga höfundarétt efnis í þessu hefti komi skýrt fram. Þeim dreifir þessu efni í hluta eða heild er heimilt að taka sanngjarna þóknun fyrir dreifingu og afritun sýnist honum svo.

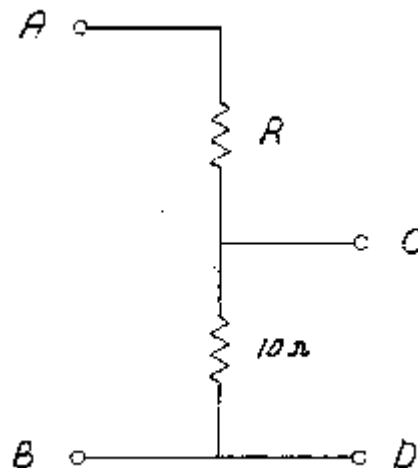
Hvað þýðir klausan að ofan? Jú einfaldlega að ef þú bætir við þetta ættirðu að leyfa öðrum að njóta þess án takmarkanna.

Kópavogi 24. febrúar 1999  
Hrafnkell Eiríksson

1) (Próf 1997, dæmi 1)

Milli A og B er viðnámið  $30\Omega$ .

- Hve stórt er viðnámið R?
- Hver er spennan milli C og D, þegar 15 V eru lögð á milli A og B?
- $10\Omega$  viðnámið þolir mest 40W. Hversu mikill straumur má ganga inn á A ef enginn straumur fer út af C?



Lausn:

a)

Viðnám í rás er mótstaða sem straumurinn (I) verður að "berjast" við að komast í gegnum. Því meira viðnám/mótstaða því minna af straum kemst í gegn. Ef rásin væri vatnslögn og straumurinn í henni væri vatn þá segði viðnámið okkur hve erfitt fyrir vatnið væri að komast í gegn. Það er því ljóst að ef við setjum eitt viðnám í rásina og bætum öðru við fyrir aftan þá er heildarviðnámið hærra en ef það væri bara eitt. Við leggjum saman viðnám þar sem annað er á eftir hinu til að fá út heildarviðnám.

Svona tenging viðnáma þar sem eitt er á eftir öðru nefnist *raðtenging*.

Milli A og B er heildarviðnámið (sett saman úr tveimur)  $30\Omega$ . Annað viðnámana er  $10\Omega$  og því vantar bara  $20\Omega$  uppá til að úr verði  $30\Omega$ . Þetta má setja stærðfræðilega fram sem:

$$R_{AB} = R_{AC} + R_{CB}$$

$$\Rightarrow 30\Omega = R_{AC} + 10\Omega$$

$$\Rightarrow R_{AC} = 30\Omega - 10\Omega = 20\Omega$$

b)

Nú er búið að tengja 15V batterí milli A og B. Plússkautið við A og mínusskautið við B. Við vitum að þegar spenna er lögð yfir viðnám þá rennur í því straumur. Þeim mun stærra viðnám sem spennan er lögð yfir þeim mun minna gengur af straum því rafeindirnar frá batteríinu mæta meiri mótstöðu á leiðinni.

Allur straumurinn sem kemur út um fyrra viðnámið hlýtur að fara inn í seinna ( $10\Omega$ ) viðnámið (hvert ætti hann annars að fara, það er ekkert tengt við C). Því gengur sami straumur í báðum viðnámunum. Þegar rásahlutir eru raðtengdir eins og hér gengur alltaf sami straumur í þeim. 15V spennan frá batteríinu sem búið er að tengja á milli A og B verður að falla niður í 0V áður en B er náð. Hún hefur möguleika til að falla á tveim stöðum í rásinni: fyrst yfir fyrra viðnámið ( $R_{AC}$ ) og svo yfir hitt ( $R_{CB}$ ). Beitung nú Ohms lögmáli ( $U=I \cdot R$ ) til að reikna þetta spennufall:

Á milli A og B er 15V spenna. Viðnámið frá A til B er  $30\Omega$ . Þá segir Ohms lögmál okkur að straumurinn sem rennur frá A til B hljóti að vera:

$$I = U/R = 15V/30\Omega = 0.5A \text{ (amper).}$$

Það þýðir að það er 0.5A straumur sem rennur í gegnum  $10\Omega$  viðnámið milli C og D. Beitung

Ohmslög máli aftur til að reikna spennufallið yfir þetta viðnám:

$$U_{CD} = I_{CD} * R_{CD} = 0.5A * 10\Omega = 5V.$$

Þar með er svarið komið, 5V! Þau 10V sem eru eftir hljóta að falla yfir  $20\Omega$  viðnámið. Geturðu sannreynt það með aðstoð Ohmslög máls?

c)

Þegar straumur gengur í viðnámi þá rekast rafeindirnar á atómin í viðnáminu. Við það fara atómin í viðnáminu að titra hraðar en þau gerðu. Titringur atóma er það sem við skynjum sem hita. Þessi hiti kemur frá hreyfiorku rafeindanna. Við áreksturinn tapa rafeindirnar því orku. Orka (eða orkutap) á sekúndu er afl. Auðvelt er að reikna aflíð sem eyðist í viðnámi þegar straumur rennur í því. Það er gert með formúlunni  $P = I^2R$  (Geturðu leitt þessa formúlu út frá  $P=U*I$  og Ohmslög máli?).

Notum nú þessa formúlu til að finna hve mikill straumur má renna í  $10\Omega$  viðnáminu.

Við höfum:

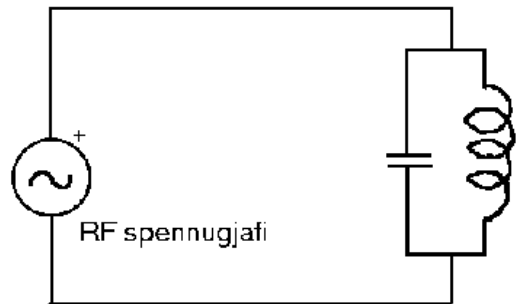
$$40 \text{ W} = I^2R = I^2 10\Omega \Rightarrow I = \text{sqrt}(40\text{W}/10\Omega) = 2 \text{ A}$$

Þetta segir okkur að mesta lagi megi renna 2 A um  $10\Omega$  viðnámið. Tekið var fram að engin straumur fer út um C. Allur straumurinn hlýtur því að koma frá viðnáminu fyrir ofan. Því mega mest 2A ganga inn á A.

Hvað gerist ef meiri straumur rennur um viðnámið?

2) (Próf 1997, dæmi 4)

Við 14MHz er þverviðnám (riðstraumsviðnám) þéttisins  $200\Omega$ . Á myndinni er raunveruleg spóla, ekki tapslaus.



- Hvert er gildi þéttisins?
- Þegar tíðni spennugjafans er stillt breytist straumurinn. Þegar stillt er í gegnum resonans mun straumurinn:
  - stíga í hámark og falla aftur
  - stíga stöðugt
  - falla í lágmark og stíga aftur
  - falla stöðugt
- Spólan er valin svo að resonance verði við 14MHz. Hvert á þverviðnám spólunnar að vera við þá tíðni.
- Bandbreidd (-3dB eða 0.707 sinnum mesta útslag) rásarinnar er 70kHz. Hvert er Q rásarinnar ef resonancetíðnin er 14MHz?

Lausn:

- Hér er greinilega á ferðinni önnur af tveim mögulegum gerðum af sveiflurásum (oft nefndar resonance rásir). Rásahlutirnir eru hér tengdir hlið við hlið og því eru þeir *hliðtengdir*. Ef þeir væru tengdir hver á eftir öðrum væru þeir *raðtengdir*.  
Riðstraumsviðnám þetta (og spóla) er háð tíðni. Þéttar hafa lítið viðnám gegn hátíðnisveiflum en mikið viðnám við lágtíðnisveiflum. Riðstraumsviðnám þetta má reikna út frá formúlunni  $X_C = 1/2\pi fC$   
f er tíðni þess straums sem fer í gegnum þéttinn og C er rýmd þéttisins (munið að C segir hve mikla hleðslu þéttirinn tekur per volt).  
Okkur var sagt að tíðnin á RF (radio frequency) spennugjafanum væri 14MHz (algeng amatöratíðni) og að riðstraumsviðnámið  $X_C = 200\Omega$ . Þá er  $200\Omega = 1/2\pi 14\text{MHz} * C \Rightarrow C = 1/2\pi 200\Omega * 14\text{MHz} = 56,85\text{pF}$
- Því er haldið fram að þegar tíðni spennugjafans er breytt (stillt) þá breytist sá straumur sem rennur um rásina. Það er eðlilegt hér af því að riðstraumsviðnám spóla og þetta er háð tíðni. Við sögðum áðan að riðstraumsviðnám (reactance) þéttis félli með hækkandi tíðni en riðstraumsviðnám spólu gerir það gagnstæða. Það hækkar með tíðni. Þegar tíðnin er stillt akkurat þannig að riðstraumsviðnám þéttisins er orðin nákvæmlega jafn stórt og riðstraumsviðnám spólunnar þá er sagt að rásin sé í resonance. Stærðfræðilega skrifum við þetta sem  $X_C = X_L$   
Þegar þetta gerist þá upphefur straumurinn í spólunni og straumurinn í þéttinum hvorn annan og engin heildar straumur er eftir, þ.a.l. hátt viðnám.

Á lágum tíðnum er þéttirinn stórt viðnám, nánast opin rás, en spólan lítið viðnám, nánast skammhlaup. Þetta þýðir að spólan skammhleypir framhjá þéttinum og mikill straumur rennur í rásinni (lítið viðnám, mikill straumur). Á háum tíðnum er þéttirinn lítið viðnám, nánast skammhlaup, en spólan stórt viðnám, nánast opin rás. Því gengur mikill straumur um rásina á háum tíðnum. Í resonace hefur hliðtengd LC rás (sveiflurás, resonancerás) mikið viðnám og því rennur lítil straumur um hana. Því hlýtur rétta svarið að vera að straumurinn falli í lágmark og stígi svo.

- c) Þetta er algengt hönnunarverkefni sem við verðum að leysa þegar við hönnum radiórásir sem eiga að vinna á ákveðinni tíðni.

Í b) lið sáum við að við resonace er riðstraumsviðnám spólu og þéttis jafn stórt eða

$$X_C = X_L$$

Okkur er gefið að riðstraumsviðnám þéttisins sé  $200\Omega$  við  $14\text{MHz}$  sem er resonace tíðnin. Þá hlýtur riðstraumsviðnám spólunnar að vera það sama eða  $X_L = 200\Omega$ . Þá er ekkert annað eftir en að leysa út stærð spólunnar úr formúlunni fyrir riðstraumsviðnámi spólu,  $X_L = 2\pi fL$

$$200\Omega = 2\pi 14\text{MHz}L \Rightarrow L = 200\Omega / 2\pi 14\text{MHz} = 2.27\mu\text{H}.$$

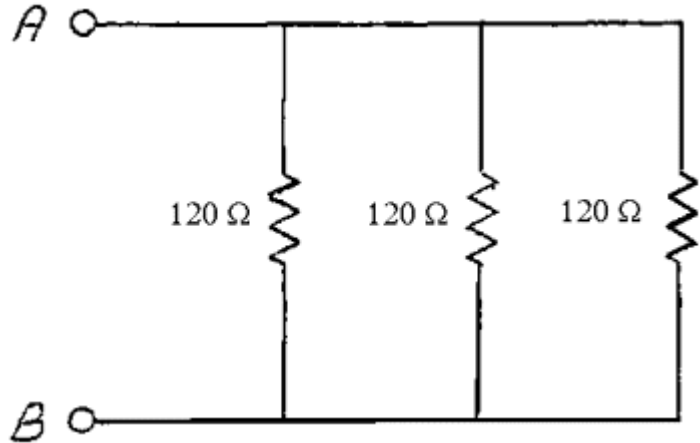
Einingin H stendur fyrir Henry og er mæling á sjálfspani (hvaða önnur tegund af spani er til?).

- d) Við sáum í b) lið að þegar við stillum tíðni spennugjafans þá breytist straumurinn. Fyrst er hann mikill á lágum tíðnum, fellur og fellur meðan tíðnin er að nálgast resonance og eykst svo aftur. Þetta hlýtur þá að þýða að viðnám LC rásarinnar hefur topp í kringum resonacetíðnina (stórt viðnám felur í sér lítin straum). Við tölum um bandbreidd sem það tíðnibil kringum resonacetoppinn þar sem viðnámið hefur ekki fallið um meira en 3dB frá toppgildi. Til er einföld formúla sem tengir Q rásar, bandbreidd hennar og resonacetíðni. Hún er  $Q = f_0/BW$ , þar sem BW er bandbreidd mæld í Hz. Við vitum bæði bandbreiddina  $BW = 70\text{kHz}$  og  $f_0 = 14\text{MHz}$ . Þá getum við reiknað Q sem  $Q = f_0/BW = 14\text{MHz}/70\text{kHz} = 200$ .

3) (Próf frá 1996, dæmi 1)

Milli A og B er lögð 60V spenna.

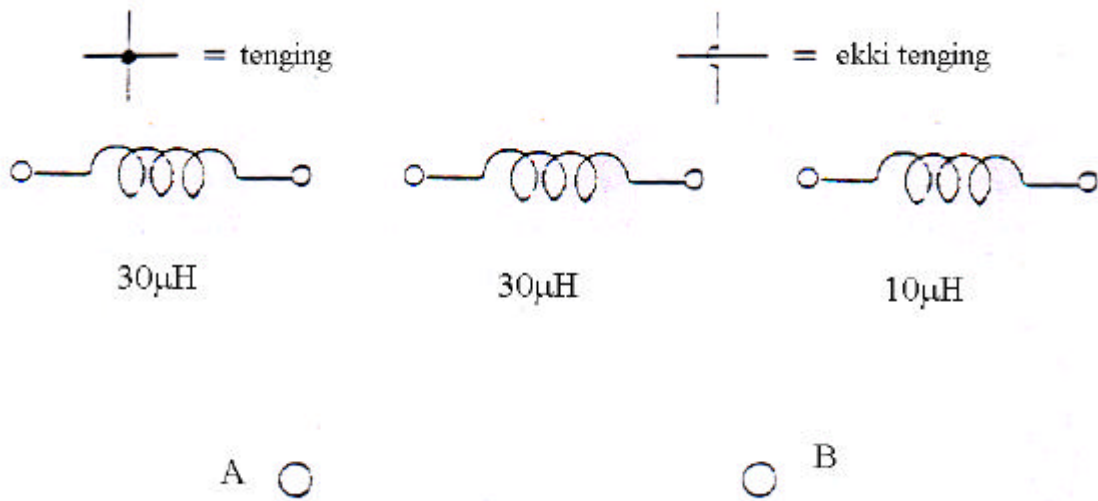
- Hve mikill straumur gengur í einu viðnámi?
- Hvert er viðnámið milli A og B?
- Hve mikið afl gefur 60V spennugjafinn?



Lausn:

- Ohmslögmál segir okkur að straumur í gegnum viðnám sé í réttu hlutfalli við spennuna yfir það eða  $U=I \cdot R$ . Við vitum spennuna og viðnámið og getum því reiknað strauminn.  
 $60V = I \cdot 120\Omega \Rightarrow I = 60V / 120\Omega = 0.5A$
- Hér eru 3 viðnám *hliðtengd*. Til að skilja betur hvað gerist við hliðtengingu skulum við hugsa um rennsli vatns í rörum.  
Hugsum okkur að við þurfum að koma ákveðnu vatnsmagni frá A til B og við eigum bara eina tegund af rörum. Við byrjum á að tengja þetta rör á milli A og B. Þá fer vatn að renna þar á milli. Við sjáum að þetta er ekki nærri nóg vatn heldur aðeins 1/3 af því vatni sem við þurfum. Ef við ættum breiðara rör gætum við bara sett það í staðin og fengið meira vatn. En við eigum bara eina tegund. Við leysum málið einfaldlega með því að tengja 2 eins rör við hliðin á því fyrsta og fáum þá 3svar sinnum meira vatn. Nú rennur nóg vatn frá A til B.  
Þetta er eins með straum í rás. Viðnám takmarkar hve mikill straumur getur runnið. Ef við búum til auka leið fyrir strauminn kemst meiri straumur í gegn.  
Viðnám 3 eru jafn stór, því gengur 1/3 af heildarstraumnum í hverju viðnámi (hvað er heildarstraumurinn þá?).  
Freistandi er að reikna út heildarviðnámið fyrir svona hliðtengd viðnám með því að leggja gildi þeirra saman og fá út heildargildið. Það gengur ekki því ef við leggjum saman tvö viðnám fæst stærra viðnám og stærra viðnám þýðir minni straumur! Það sem við verðum að leggja saman er leiðnin. Leiðni er náskyld viðnámi en er öfug við það. Lítil leiðni þýðir mikið viðnám og mikil leiðni þýðir lítið viðnám. Ef við köllum leiðni G þá má setja þetta stærfræðilega fram sem  $G=1/R$   
Við getum nú notað þetta til að finna heildarviðnámið milli A og B. Leiðni eins viðnáms er  $G=1/R=1/120\Omega = 0,00833333$  S.  
Heildarleiðnin verður þá  $G_{tot} = G + G + G = 3 \cdot G = 0,025$  S. Heildarviðnámið er  $R_{tot} = 1 / G_{tot} = 1 / 0,025S = 40\Omega$
- Formúlan fyrir tengslum afls sem eyðist í viðnámi, spennunnar sem er yfir viðnámið og viðnámsins er  $P = U^2 / R = 60V^2 / 40\Omega = 90W$ .  
Munum að afl er orka sem er notuð/eyðist á sekúndu. Orkan kemur frá árekstri rafeindanna við atómin í viðnámunum.  
Önnur leið til að reikna þetta er bara beint með formúlunni  $P=U \cdot I$ . Spennan U er gefin í upphafi dæmisins. Straumin í hverju viðnámi vitum við frá a) lið, heildarstraumurinn I er þá samanlagður straumurinn í gegnum öll viðnám eða 1,5A. Aflið er því  $P = 60V \cdot 1,5A = 90W$

4) (Próf 1996, dæmi 2)

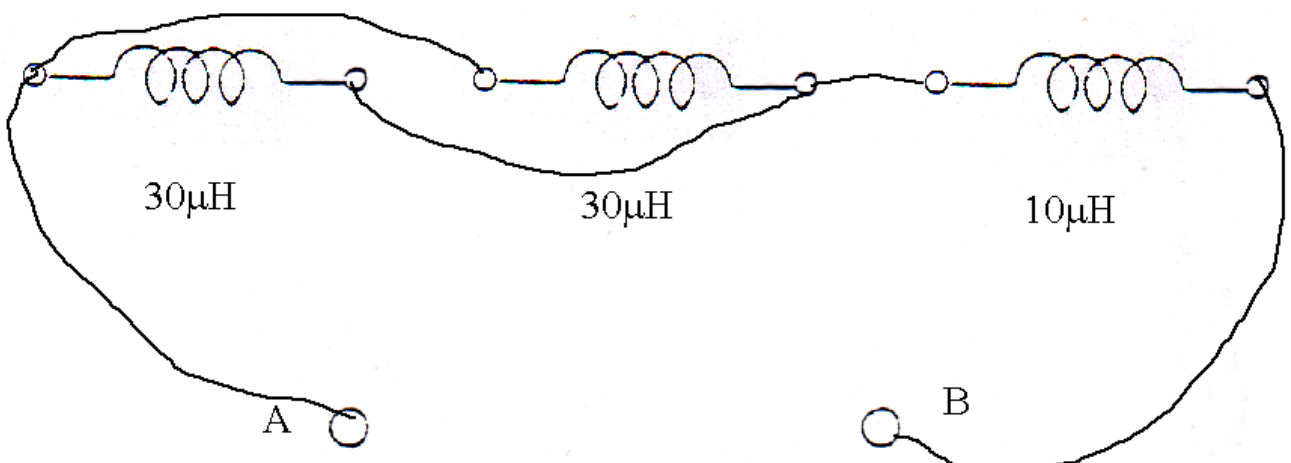


Engin segultengsl eru milli spólanna.

Teiknið tengingu við A og B þannig að sjálfspanið þar á milli verði  $25\mu\text{H}$ .

Lausn:

Sjálfspan samtengdra spóla getum við reiknað eins og um viðnám væri að ræða til að finna heildarspan þeirra. Heildarspanið á að vera  $25\mu\text{H}$ . Hvernig væri að reyna að útbúa þessi  $25\mu\text{H}$  úr  $15\mu\text{H}$  og  $10\mu\text{H}$ ? Við eigum  $10\mu\text{H}$  og þurfum þá bara að útbúa okkur  $15\mu\text{H}$  spólu. En  $15\mu\text{H}$  er einmitt helmingurinn af  $30\mu\text{H}$ . Ef við hliðtengjum þær tvær fáum við eina helmingi minni (eins og með viðnámum) eða  $15\mu\text{H}$ . Raðtengjum hana við  $10\mu\text{H}$  spóluna og fáum í heildina  $25\mu\text{H}$ .



5) (Próf 1996, dæmi 3)

Spenna þéttis á gefnu augnabliki er:

- i. í réttu hlutfalli við strauminn á því augnabliki.
- ii. uppsöfnuð afleiðing straumsins
- iii. háð segulsviði straumsins
- iv. óháð rafsviði milli platnanna

Lausn:

Liður i): Ef spennan yfir þéttin væri í réttu hlutfalli við strauminn þá mætti skrifa það stærðfræðilega sem  $U=I \cdot C$  þar sem  $C$  er hlutfallsstuðull. En þetta er eins og Ohmslögmál (þar er  $R$  hlutfallsstuðullinn) og við vitum að Ohmslögmál gildir ekki um þetta! (og þó? Hvenær megum við nota það um þetta?) Þetta kemur ekki til greina.

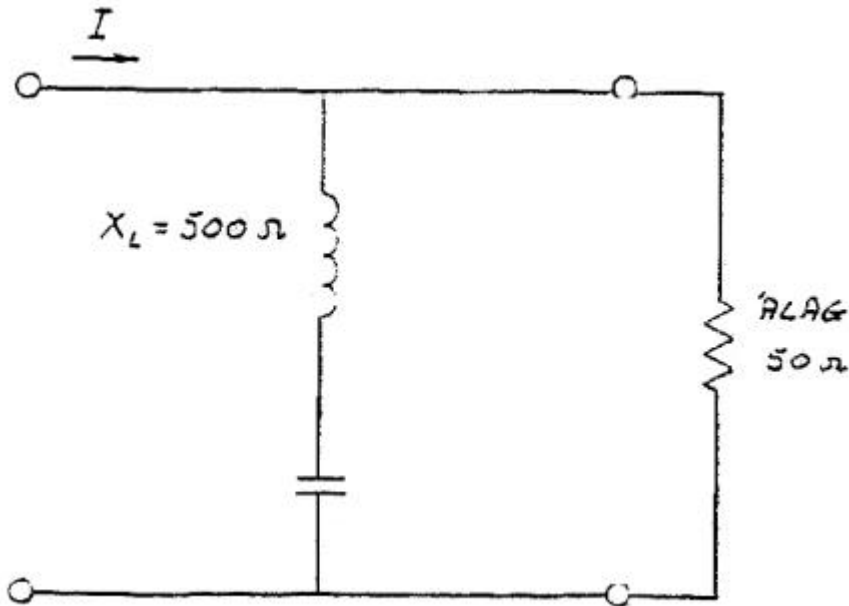
Liður iii) Hér er bara verið að leiða ykkur í gildru. Þéttar hafa ekkert með segulsvið að gera, en vinir þeirra spólurnar hafa það aftur á móti. Þetta kemur ekki til greina.

Liður iv): Þéttir er ekkert annað en tvær plötur. Þegar hleðslur setjast á plöturnar myndast rafsvið á milli þeirra (rafeindirnar toga í gagnstæða hleðslu). Rafsvið leiðir til spennu. Spenna þéttis getur því ekki verið óháð rafsviðinu. Þetta kemur ekki til greina.

Liður ii): Þegar straumur gengur inn í þétti hleðst hann upp. Eftir því sem meiri straumur kemur inn á hann þeim mun hraðar sest hleðsla á plötur hans. Hleðslan leiðir til rafsviðs sem leiðir til spennunum. Hér er eina svarið sem kemur til greina og rétta svarið!

6) (Próf 1996, dæmi 3)

Spólan og þéttirinn eru í resonance við 7MHz



- Hvert er gildi spólunnar?
- Hver er rýmd þéttisins?
- Við resonance fer tífaltt meiri straumur fram hjá álaginu en í gegnum það. Hvert er Q spólunnar ef töpin í þéttinum eru óveruleg?
- Rásinni í þessu dæmi er ætlað að:
  - deyfa háar tíðnir
  - deyfa lágur tíðnir
  - deyfa (þröngt) tíðnisvið
  - deyfa allar tíðnir nema á tilteknu (þröngu) sviði.

Lausn:

- Okkur er gefið að spólan hafi riðstraumsviðnámið  $X_L = 500\Omega$  og að tíðnin sé  $f = 7\text{MHz}$ . Við getum þá reiknað stærð spólunnar með  $X_L = 2\pi fL \Rightarrow 500\Omega = 2 \cdot 3.141 \cdot 7\text{MHz} \cdot L$ .  
 $\Rightarrow L = 500\Omega / (2 \cdot 3.141 \cdot 7\text{MHz}) = 11,37\mu\text{H}$
- Við resonance er riðstraumviðnám spólu jafn stórt og riðstraumsviðnám þéttis. Því er  $X_C = X_L = 500\Omega$   
Við notum nú bara formúluna fyrir riðstraumsviðnám þéttis til að finna stærð hans.  
 $X_C = 1/(2\pi fC) \Rightarrow C = 1/(2\pi fX_C) = 1/(2 \cdot 3.14 \cdot 7\text{Hz} \cdot 500\Omega) = 45,8\text{pF}$
- Við resonance upphefja spólan og þéttirinn hvort annað og það eina sem stendur eftir af resonancerásinni er tapsviðnám spólunnar. Okkur er sagt að um það renni 10 sinnum meiri straumur en um álagsviðnámið sem er  $50\Omega$ . Meiri straumur þýðir minna viðnám. Við getum litið svo á að í resonancerásinni séu 10 álagsviðnám hliðtengd og því komist 10 sinnum meiri straumur þar um. Ef við hliðtengjum 10 jafnstór viðnám fáum við út samsvarandi viðnám sem er 10 sinnum

minna eða  $50\Omega/10 = 5\Omega$  Þetta  $5\Omega$  viðnám hlýtur því að vera tapsviðnám spólunnar.

Formúlan fyrir Q spólu með tapsviðnámi raðtengdu við sig er

$$Q = X_L/R = 500\Omega/5\Omega = 100.$$

- d) Þegar tíðni er lág þá er viðnám þéttisins mikið og hann er opin rás. Hann aftengir resonancerásina frá álaginu. Á lágum tíðnum skiptir resonancerásin því engu máli. Á háum tíðnum er viðnám spólunnar hátt og hún er opin rás. Hún aftengir því resonancerásina frá álagi. Á háum tíðnum skiptir resonancerásin því engu máli. Því sjáum við að það er einhver tíðni á milli hárri og lágra tíðni þar sem resonancerásin skiptir máli. Resonancerás skiptir mestu máli á resonancetíðninni en þá upphefjast spólan og þéttirinn og það er næstum skammhlaup til jarðar. Merki á resonancetíðninni komast því aldrei til álagsins því þau sogast til jarðar áður en þau komast þangað. Rásin stoppar því þröngt tíðnisvið.